数理解析研究所講究録
243巻 1975年 97-99

一層単純なspineの見つけ方

神戸大教養 池田裕司

1. Introduction

3次元多様体のspineとしてfake surfaceという概念は可成りの良い性質を持っていると思われる。以後扱いたいのはある3次元多様体のspineとしてあるclosed fake surfaceが与えられている時，(何らかの意味で)もっと簡単或いは単純な(spineになっている) closed fake surfaceを見つける事である。今迄の方向性からいえば，この問題はいつか考えなければならないのであるから今考える事にする。ここでは，上の"単純"という意味を第3種特異点の個数の多少で測る事にする。

Pを与えられたclosed fake surfaceとする。この時，hで$\dot{U}(P)$から$\mathfrak{S}_2(P)$の上への局所的なembedding(以前に作ったもの)を表わし，h_Mで，$M(P)$の要素M上へのhの制限を表わす事にする。

定義　(1)　$v(M) = h_M^{-1}(\mathfrak{S}_3(P))$ の点をMの頂点という。

(2)　$\dot{M} - v(M)$ の connected component の closure を Mの辺という。

$\mathcal{M}(P)$ の要素MがPの最小の要素であるというのは

$$\# v(M) \leq \# v(M'), \quad M' \in \mathcal{M}(P)$$

が成立する事をいう。特に，最小要素が2次元円板の時はそれを最小円板という事にする。

2、最小要素及び最小円板について

ここで問題にするのは，最小要素(と最小円板の存在と)その頂点の個数の上限である。

定理1．Pを normal spine であるとして，MをPの最小要素とする。この時，Pが acyclic ならば

$$\# v(M) \leq 5$$

が成立する。

最小円板の存在については次の定理を得る。

定理2．Pを acyclic closed fake surface で $\#\mathfrak{S}_2(P) = 1$ とする。この時，Pには最小円板Dが存在して，

$$1 \leq \# v(D) \leq 5$$

が成立する。

3. もっと単純な spine を

結果のみ記すと次のようになる。

定理3 V を acyclic な3次元多様体として，P を V の normal spine とする。P が最小円板 D を持って $\#v(D)$ が 1，2，又は3の時は，V は P より単純な spine（closed fake surface）を持つ。

この定理によると（他にいくつか分っている事も使って）問題は全て，最小円板の頂点の個数が4及び5の時である事が導かれるのである。

4. J. Robertson の結果について

以前の結果と，上に述べた事を使ってほんの少し計算すると，1972年に J. Robertson が Notices に発表している（但し，証明は未発表(?)）次の結果は大した苦労なしに得られる。

定理4. V を acyclic な3次元多様体とする。V が $\Sigma(5,3)$ の中に spine を持つならば，V は3-ball である。